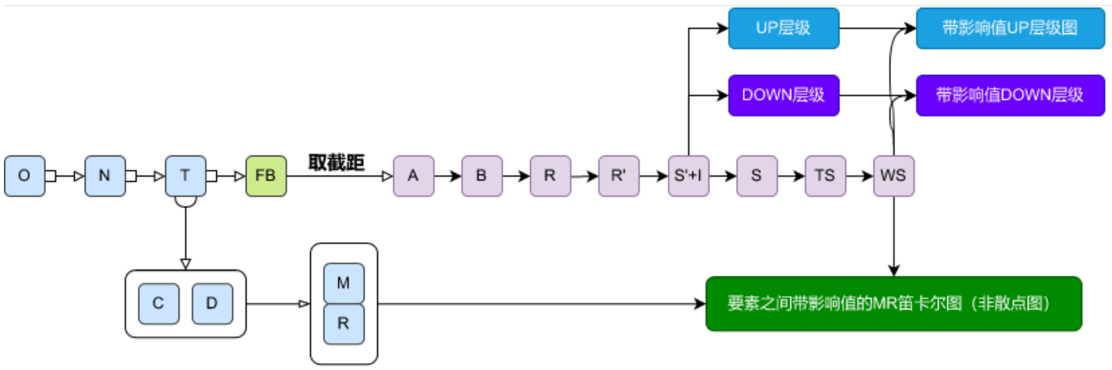
把模糊可达矩阵 FR，引入到决策与实验室方法和解释结构模型联用模型中，形成新的 DEMATEL-FR-TAISM 模型方法。运用 DEMATEL-FR-TAISM 模型对构建系统可以进行更为全面的分析。

DEMATEL-FR-TAISM 最终以可视化的方式呈现两个结果——带影响值的对抗层次拓扑图与带影响值的笛卡尔直角坐标图。

这种直观的结果呈现，可以更清晰的展示社会科学中的质性问题，进而揭露事物的事物的本质。

Zhensong Lan 等在 Hierarchical topological model of the factors influencing adolescents’ non-suicidal self-injury behavior based on the DEMATEL-TAISM method 一文首次提出了 DEMATEL-TAISM。

该方法的流程图如下：



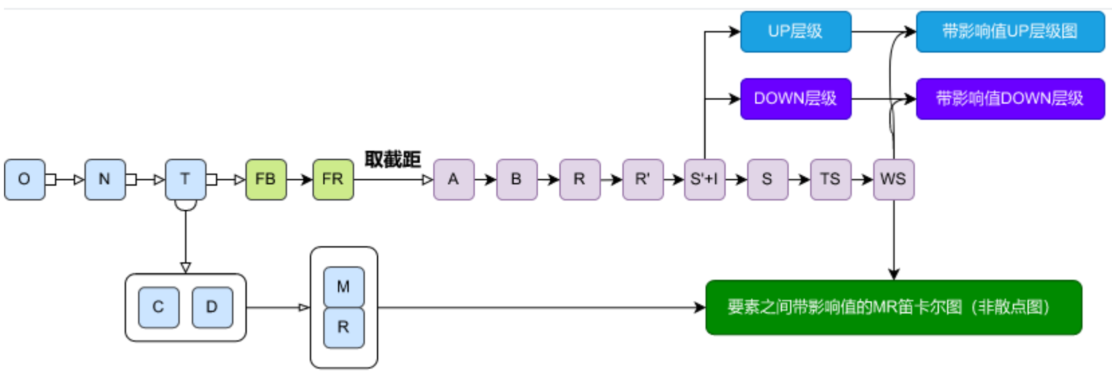
流程图中符号	名称
O	直接影响矩阵
N	规范化矩阵，归一化矩阵
T	综合影响矩阵(核心内容)
FB	模糊相乘矩阵
A	邻接矩阵、关系矩阵、截距阵
B	相乘矩阵
R	可达矩阵
R’	缩点可达矩阵

S’	骨架矩阵
S	一般性骨架矩阵
TS	一般性综合影响骨架矩阵
WS	一般性回路标注综合影响骨架矩阵
UP 层级	结果优先抽取方式得到的要素层级分布
DOWN 层级	原因优先抽取方式得到的要素层级分布
带影响值的 UP 层级图	在 UP 型层级要素分布中添加连线，并标注影响值
带影响值的 DOWN 层图	在 DOWN 型层级要素分布中添加连线，并标注影响值
D|C	影响度、被影响度
M|R	中心度、原因度
笛卡尔直角坐标图	横轴对应中心度、纵轴对应原因度，连线来自 WS

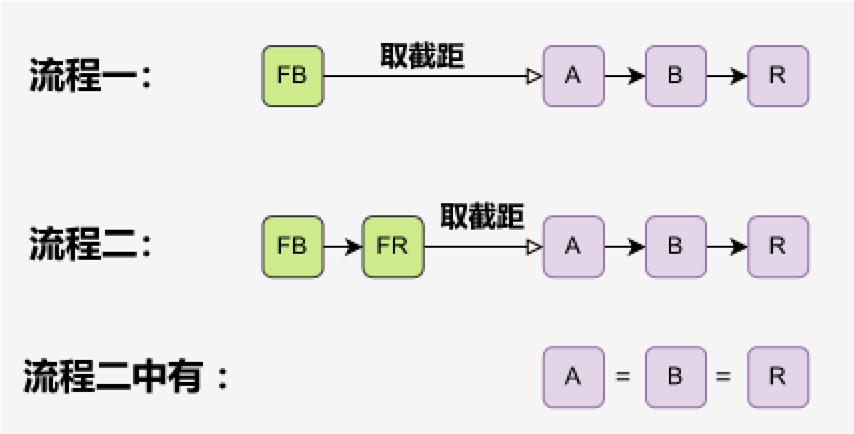
DEMATEL-TAISM 方法是通过两类图来呈现结果——并对两类图进行分析。

第一类图即是带影响值的对抗（UP|DOWN）层级拓扑图。第二类图即是要素之间标注有影响值的笛卡尔直角坐标图，其中横轴为中心度，纵轴为原因度。

lan 一文的基础上引入模糊可达矩阵有下面流程图。



本文引入 FR 后的方法与 Lan 一文进行比较。有如下核心步骤。



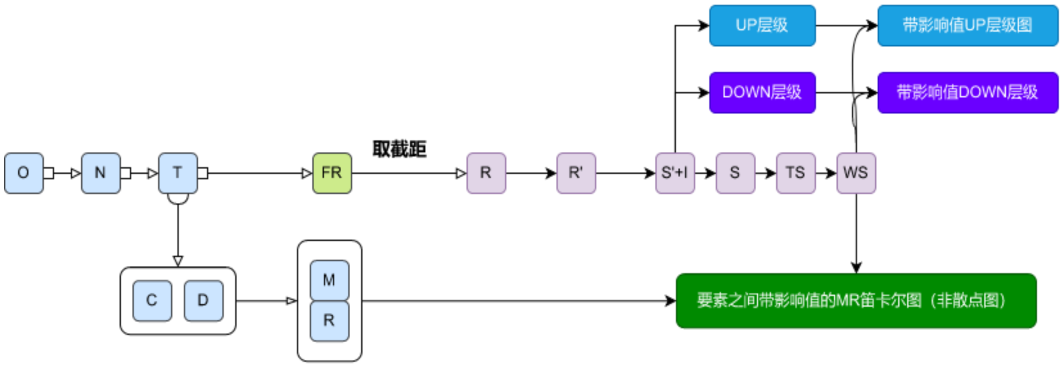
黄炜 黑客与反黑客思维研究的方法论启示——解释结构模型新探

兰芳 基于 FISM-ANP-灰色聚类的软件项目开发风险评价研究

两文中论证了，相同的模糊相乘矩阵 FB,相同的截距，由流程一与流程二最终得到的可达矩阵是一致的。

其中运用查德算子（最大最小算子）获得的模糊可达矩阵 FR 取任意截距得到的截距阵 A 依然为可达矩阵,且有$A = B = R$。

因此 DEMATEL-FR-TAISM 方法的流程图可以简化为如下图所示。



模糊矩阵阈值集合与结构数目关系

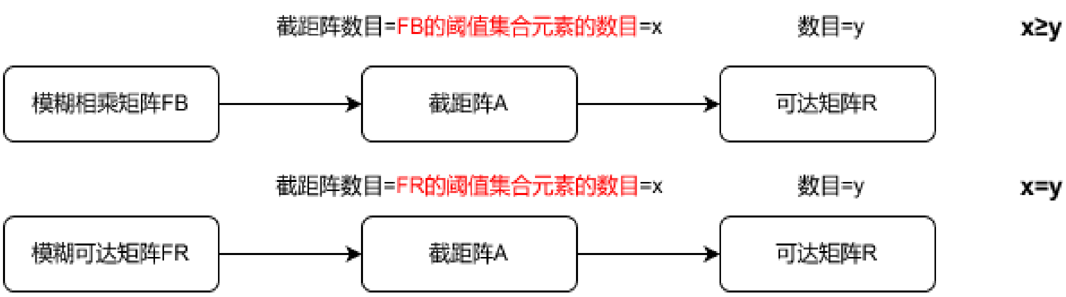
阈值集合定义：对于任意模糊矩阵将矩阵值去重，排序后得到的集合称之为阈值集合。用符号Ψ表示。依据定义该集合有第一、有序性；第二、记录集合元素的数目。

设Ψ 中相邻的两个元素，分别为 e1,e2。对任意模糊矩阵 F 进行截取，且

截距值为 k，且有 e1<k<e2，显然在此区间的截距 只能得到一个截距阵 A。

依据文献 黄炜 黑客与反黑客思维研究的方法论启示——解释结构模型新探论文中的结论：模糊可达矩阵 FR 得到的任意截距阵 A 为可达矩阵 R。

因此有如下图所示。



模糊可达矩阵 FR 对应的总结构数量，即为 FR 的阈值集合中元素的数量。

特征结构选取原则

上一节讨论了由模糊可达矩阵 FR 的阈值集合Ψ可以求解出系统所有的结构。

在众多的因果层级结构中如何选取出最具代表性的特征结构。本文采用的是如下原则，用以选取出特征结构。

层级数优先原则，即选取层级数目最多的结构。

连通域数目最少原则，即选取孤立系统数目最少的结构。

回路数目最多原则，即选取因果回路数目最多的结构。

最大回路所含要素数目最小原则。

该结构的数目最大原则。具体某结构等于模糊可达矩阵中某矩阵值的数目。

通过依次运用上述五原则即可选取出特征结构。

DEMATEL-FR-TAISM 详细计算过程及对应算法

直接影响矩阵O的获得

因素为$S=\{S_1,S_2\dots S_n\}$。确定要素之间的相互关系、直接影响程度S_i与S_j之间的关系用o_{ij}表示，o_{ij}即表示因素i对因素j影响的强弱，$O=(o_{ij})_{n\times n}$即为直接影响矩阵O

规范化矩阵 N

规范化矩阵 N，是对直接影响矩阵 O 归一化后得到的新矩阵。归一化可以采取行和最大值法、列和最大值法等多种方法获得。对于$O=\left(o_{ij}\right)_{n\times n}$，归一化转化步骤如式 3-1：

$$N=\frac{1}{Maxvar}\left(o_{ij}\right)_{n\times n}=\left(\frac{o_{ij}}{Maxvar}\right)_{n\times n}=\left(n_{ij}\right)_{n\times n}$$

其中对于任意矩阵值有$n_{ij}\in[0,1]$即规范化矩阵中的值为一个介于 0 到 1 之间的数值，该数值可以映射成模糊数，百分数，概率等等。

其中常用的归一化方法有：

行和最大值法: $$Maxvar=a=\max\left(\sum_{j=1}^{n}o_{ij}\right)$$

列和最大值法: $$Maxvar=b=\max\left(\sum_{i=1}^{n}o_{ij}\right)$$

行和、列和取大: $$Maxvar=\max(\max(a),\max(b))$$

行和、列和取小: $$Maxvar=\min(\max(a),\max(b))$$

行和列和最大值的弦: $$Maxvar=\sqrt{(\max(a))^2+(\max(b))^2}$$

弦的最大值法: $$Maxvar=\sqrt{(o_{ij})^2+(o_{ji})^2}$$

综合影响矩阵 T

$$T = N + N^2 + N^3 + \cdots + N^k = \sum_{k=1}^{\infty} N^k \to T = N(I-N)^{-1}$$

其中 I 为单位矩阵，$(I-N)^{-1}$为$(I-N)$的逆矩阵。

上述公式亦可写作:$\|T\| = \frac{\|N\|}{\|I-N\|}$

逆矩阵有多种方法求解，本处用 LU 分解法求解逆矩阵。

LU 分解法其实是高斯消元法的一种变种算法。是将矩阵 A 分解为一个下三角矩阵与一个上三角矩阵的乘积。

所谓的三角阵就是一半为零的矩阵。

L 是下三角矩阵(Lower TriangularMatrix)，即主对角线以上的值全部都是 0 的矩阵。U 是上三角矩阵(Upper Triangular Matrix)，即主对角线以下的值全部都是 0 的矩阵。

$$A = LU$$

$$A^{-1} = L^{-1}U^{-1}$$

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

上述矩阵中符合如下公式：

$$\begin{cases} u_{1j} = a_{1j} \quad , & j \in (1,2,\cdots,n) \\ l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{u_{i1}} \quad , & i \in (2,\cdots,n) \\ l_{ik} = \dfrac{a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk}}{u_{kk}}, & i \in (k+1,k+2,\cdots,n); k \in (2,3,\cdots,n) \\ u_{kj} = a_{kj} - \displaystyle\sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj}, & j \in (k,k+1,\cdots,n); k \in (2,3,\cdots,n) \end{cases}$$

L 矩阵求逆公式如下：

$$(L|I)=\left(\begin{matrix} l_{11} & - & - & - \\ l_{12} & l_{22} & - & - \\ \vdots & \vdots & \ddots & - \\ l_{1n} & l_{2n} & \dots & l_{nn} \end{matrix}\left|\begin{matrix} 1 & - & - & - \\ - & 1 & - & - \\ - & - & 1 & - \\ - & - & - & 1 \end{matrix}\right.\right)$$

逆矩阵中的值如下：

$$(l^{-1})_{ij}=\begin{cases} 0, & i<j \\ \dfrac{1}{l_{ii}}, & i=j \\ -\dfrac{1}{l_{ii}}\sum_{k=j}^{i-1} l_{ik}\,(l^{-1})_{ik}, & i>j \end{cases}$$

对于任意三角阵其转置矩阵的逆矩阵等于其逆矩阵的转置矩阵:

$$(L^{\Gamma})^{-1}=(L^{-1})^{\Gamma}$$

$$(U^{\Gamma})^{-1}=(U^{-1})^{\Gamma}$$

因此在求解上三角矩阵的逆矩阵的时候可以先将其转置为下三角矩阵，然后利用求解下三角矩阵的逆矩阵算法来对其进行求解，再对结果进行转置就可以求解出上三角矩阵的逆矩阵。

模糊可达矩阵 FR 的求解

$$\mathrm{FB}=\mathrm{T}+\mathrm{I}$$

FB 为模糊相乘矩阵。

I 为单位矩阵。

模糊相乘矩阵 FB 具有主对角线全部为 1 的特点。

$$\mathrm{FB}^{\mathrm{k}-1}\neq\mathrm{FB}^{\mathrm{k}}=\mathrm{FB}^{\mathrm{k}+1}=\mathrm{FR}$$

模糊相乘矩阵通过扎德算子（最大最小算子）连乘，直到矩阵不再发生变

化，得到模糊可达矩阵 FR。

设 FC ＝FB ×FB $FC=\left[\mathrm{c_{ij}}\right]_{\mathrm{n}\times n}$ $FB=\left[\mathrm{b_{ij}}\right]_{\mathrm{n\times n}}$

模糊算子采用查德算子，即最大最小算子，格式如下。

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\wedge b_{kj} \quad =\left(b_{i1}\wedge b_{1j}\right)\vee\left(b_{i2}\wedge b_{2j}\right)\vee\left(b_{i3}\wedge b_{3j}\right)\cdots\vee\ \cdots\left(b_{in}\wedge b_{nj}\right)$$

阈值集合的求解及其结构聚类特点

对模糊可达矩阵中的矩阵值去重并按照从小到大的顺序排序。即得到阈值集合Ψ。阈值集合任意相邻的两个元素之间所其截距阵是相同的可达矩阵。

因此通过简单的排序就可以可以得到原矩阵对应的结构数目，每种结构即为一种特征结构。

可达矩阵 R 的求解

模糊可达矩阵 FR 取截距，得到的截距阵就是可达矩阵 R

设模糊可达矩阵 FR 有 $FR=\left(fr_{ij}\right)_{n\times n}$

可达矩阵形式为 $R=\left(r_{ij}\right)_{n\times n}$

当取任意一截距k且有 $k\in[0,1]$

则可达矩阵 R 其矩阵值 r_{ij}如下：

$$r_{ij}=\begin{cases}1，fr_{ij}\geq k\\0，fr_{ij}<k\end{cases}$$

缩点可达矩阵 R’的求解

缩点可达矩阵 R’ 就是把可达矩阵 R 中的回路用一个点表示。

所谓缩点运算，就是把一个回路当成一个要素处理，也就是把形成回路的多个节点当一个节点处理。

数学语言来定义回路即是：包含有两个或者两个以上要素的强连通分量。回路不是环路，跟环路是有本质的不同。回路是针对有向图而言，环路是针对无向图而言。比如 A→ B →C、A→C 这样一个拓扑是环路但不是回路。

回路又叫反馈系统，一个系统里出现多个回路，每个回路就是一个反馈子系统。在其它结构模型中，回路的研究是一个非常重要的内容，甚至是最重要的内容。对于回路，一般采用随机排列的回路原始图，经过回路计算之后，最终菊花链表示的有向边 C→D 在原始图中是不存在的。如下图 3-2a，3-2b 所示。

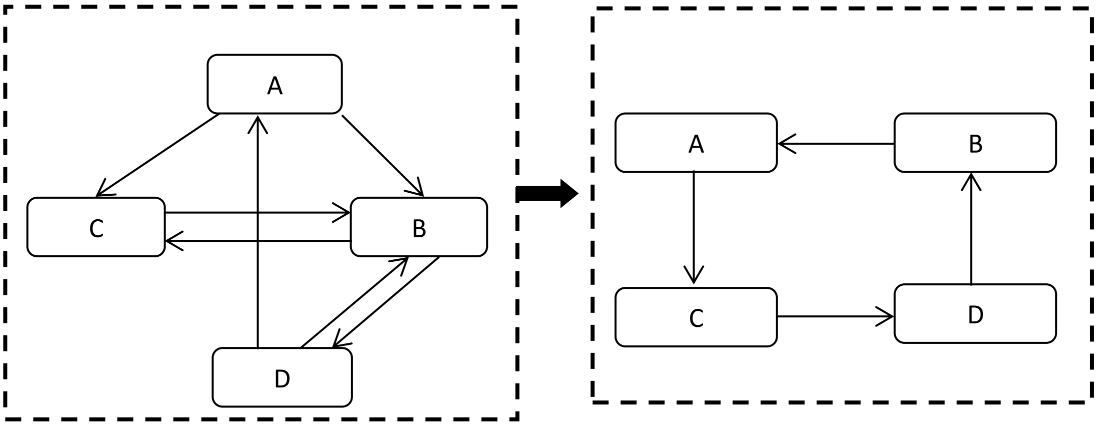


图 3- 2a 随机排列的回路原始图图 3- 2b 回路的菊花链有向图

注：本图为作者绘制。

上面两个图是等价的，图 3-2b 代表着由 n 个要素组成的回路，可以用一个菊花链回路表示，这个菊花链的特征是，这些要素的排列可以是随机的，如图 3-2a。对于 ISM 的处理来说，回路只需要通过首尾相连的方式，把随机排列的要素连接起来。n 个要素对应 n 条有向边。回路在 ISM 最终层级图中最大的特点是：回路中的要素处于同一层级。涉及到反馈系统中的有向边，分为三类：

输入边：即从别的要素发出到回路要素中的有向边，在解释结构模型中，一

般是由下层集的要素发出，回路中的要素接收。

输出边：即从回路要素中发出的有向边。在 ISM 层级图中，回路处于下层级，接收有向边的是上层级的要素。

反馈边：即回路中要素间的有向边。回路要素中的反馈可能很复杂，在 ISM 中通常用一个简单的回路代替。其形式上表现为成顺序连接的环形回路。

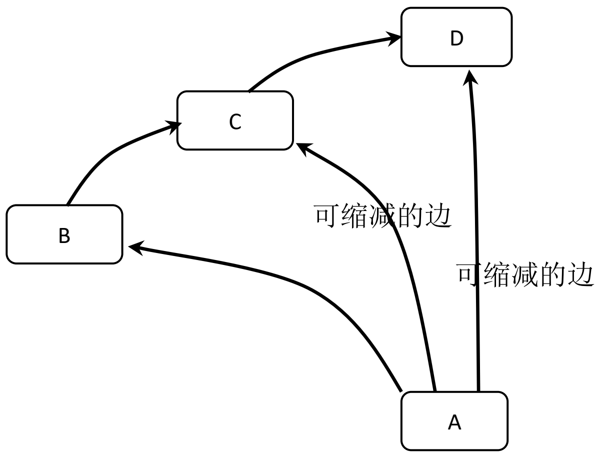
本处计算回路采用的事 Tarjan 算法

骨架矩阵 S’的求解

骨架矩阵 S’是 R’通过缩边进行求解

缩边运算的本质是把重复路径删除，即把所有的有重复嫌疑的向前边删除。如图 3-3 所示。

图 3-3 缩边示意图



上图中的 A→C、A→D 的有向边可以删除，因为 A→B→C 这条路径包含有 A→C 的可达状态。从可达的概念来阐释，如果两要素之间存在两条路径，其中直接的路径是可以删除的。现实世界中经常出现缩边处理，比如不要越级进行指挥。

对于没有回路的矩阵来说，即 DAG（无回路有向图），算出所有可以缩掉的边后的矩阵，即骨架矩阵，有一个简单的代数表达形式。

$$S' + I = R' - (R' - I)^2$$

S' 为 R’的缩边矩阵，又称为骨架矩阵，骨干矩阵，骨架阵；R' 为缩点可达矩阵；I：为单位矩阵。

该方法从运算效率上来说不高，即运算时间相对较长、运算过程复杂度高，但是从数学表达上很清晰。当系统中出现无回路有向结构时候，该缩减矩阵中边的总数最少，且矩阵为唯一。该唯一缩边缩减矩阵叫骨架矩阵。当系统存在回路的时候，多数不存在唯一表达的骨架矩阵，只存在边数最少的缩减矩阵，该矩阵叫一般性骨架矩阵。缩边与缩点是紧密联系在一起的，有缩点一定存在缩边。

一般性骨架矩阵 S

即用菊花链(菊花环)的方式代入系统中的回路。得到的矩阵称之为一般性骨架矩阵。

所谓菊花环，就是把回路中的要素以一个简单的环状回路代入回去。菊花环具有边最少的特点。

一般性综合影响骨架矩阵 TS

把 S 矩阵中为 1 的值用模糊可达矩阵 FR 中的矩阵值替代。其值代表要素之间的影响值。

一般性回路标注综合影响骨架矩阵 WS

针对 TS 中的回路，即反馈边重新标注起来。剩下的带有影响值的边都为跨层级的边。

UP 型与 DOWN 型的层级抽取计算

对系统进行层次化，层级化是解释结构模型的主要内容。层次化可以对可达矩阵 R、缩点可达矩阵 R’、填充单位矩阵的骨架矩阵 S’+I 来进行。S’+I 亦可以用 S’I 来表示，又可称为相乘骨架矩阵。

对于布尔方阵，有可达集合 R，先行集合 Q，共同集合 T，其中$T = R \cap Q$。以关系矩阵 A 为例，对于其要素e_i：

e_i的可达集合记作$R(e_i)$，即要素对应行值为 1 的所有要素。

e_i的先行集合记作$Q(e_i)$，即要素对应列值为 1 的所有要素。

e_i的共同集合记作$T(e_i)$，即$R(e_i) \cap Q(e_i)$。

（1）UP 型

UP 型层级图，即结果优先的层级划分，其抽取规则为：$T(e_i) = R(e_i)$。

对于无回路的有向图(DAG)，可以用矩阵$S + I$进行操作，即骨架矩阵中主对角线全部填充 1。只要可达集与共同集相同，就抽取出相关要素。每次抽取出来的要素放置在上方，依次按照由上往下的顺序放置抽取出的要素。

（2）DOWN 型

DOWN 型层级图，即原因优先的层级划分，其抽取规则为：$T(e_i) = Q(e_i)$。

每次抽取出来的要素放置在下方，依次按照由下往上的顺序放置抽取出的要素。

UP 型和 DOWN 型属于一组对立型的层级划分结果，邻接矩阵中的要素即为评价对象，评价对象之间的因果关系通过有向线段表示，表示为结果对象要素置于最上层，因此最上层的要素即为最终结果。

UP 型与 DOWN 型带影响值的层级拓扑图的计算

把 WS 矩阵中的值代入已经求得的 UP 与 DOWN 型的要素层级放置。

此操作即是在按照层级放置好要素的图中，添加连线。

UP 型与 DOWN 型一组拓扑层级图，又称为对抗层级拓扑图。

它具有如下特点。

第一、有向线段上有数值，该数值为要素之间的影响程度的大小。

第二、回路进行标注，即回路上的线段不在标注影响值。由于回路中的反馈边都处于同一层级，因此，最终绘制的对抗层次拓扑图中，其影响值是层级要素之间的影响值。

影响度 D、被影响度 C 的计算

影响度 D，是指综合影响矩阵 T 的行元素值之和，表示各行对应指标对其他指标的综合影响值，即影响度，其计算公式为：

$$\mathrm{D} = (\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{D}_3, \cdots, \mathrm{D}_\mathrm{n}), \ D_i = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{t}_{\mathrm{ij}}$$

被影响度 C，是指综合影响矩阵 T 的列元素值之和，表示各列对应指标对其他指标的综合影响值，即被影响度，其计算公式为：

$$\mathrm{C} = (\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3, \cdots, \mathrm{C}_\mathrm{n}), \ C_i = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{t}_{\mathrm{ij}}$$

中心度 M、原因度 R 的计算

中心度 M，是指要素的影响度 D 和被影响度 C 之和，表示对应指标在评估指标体系中的位置及其所起作用的大小。评估指标 i 的中心度计算公式为：

$$\mathrm{M}_i = \mathrm{D}_i + \mathrm{C}_i$$

原因度 R，是指要素的影响度 D 和被影响度 C 之差，表示对应指标在评估指标体系中对其他要素的影响大小。评估指标 i 的原因度计算公式为：

$$\mathrm{R}_i = \mathrm{D}_i - \mathrm{C}_i$$

笛卡尔直角坐标图的绘制

同一般的 DEMATEL 方法绘制的 MR 散点图不同，本方法最终绘制的并非散点图，而是把 WS 矩阵的值加入直角坐标图中。

要素之间的连线上的数值为两个要素之间的影响值。

对于回路要素，其反馈边上只进行标注，不加入影响值。