文章编号:1001-7402(2017)04-0167-08

应用偏序集表示权重难以获知的 TOPSIS 模型*

岳立柱[1,2],李良琼[1]

(1. 辽宁工程技术大学 公共管理与法学院,辽宁 阜新 123000;
2. 辽宁工程技术大学 阜新转型创新发展研究院,辽宁 阜新 123000)

摘　要:当权重难以获得时,应用 TOPSIS 模型会遇到困难. 为此,提出应用偏序集表示 TOPSIS 模型,不仅实现 TOPSIS 模型的排序功能,还能提高排序的稳健性. 首先,对偏序集决策方法进行简要介绍,之后根据权重大小排序信息,证明了偏序集排序与 TOPSIS 模型排序是保序的,可以应用偏序集方法表示 TOPSIS 模型. 最后,通过例子可以看出,该方法易于操作、排序稳定,不需具体权重同样可以应用 TOPSIS 模型进行决策分析.

关键词:TOPSIS;多准则决策;偏序集;权重

中图分类号:O159　　文献标识码:A

1　引言

自 Hwang 和 Yoon[1] 于 1981 年首次提出 TOPSIS 模型以来,该模型应用于经济、管理、社会、环境等多个领域,已经成为多准则决策中最受喜欢的模型之一. 学者们对该模型进行了深入研究,从模型结构上来看主要体现在三方面:一是将属性值从实数值拓展为区间数[2]、模糊数[3]、直觉模糊数[4]、区间直觉模糊数[5]等形式,使模型能够处理各种语言信息;二是将欧式距离拓展为马氏距离,解决指标之间普遍存在的共线问题[6];三是分析逆序产生原因并给出消除方法[7],使得方案排序具有保序性. 理论的发展使得 TOPSIS 模型应用更为广泛,但随着应用的深入,人们发现准则权重影响着模型质量,如何解决赋权困难、减少赋权争议成为一个亟需解决的问题.

从当前文献上来看,与 TOPSIS 模型相结合使用的赋权方法,最常使用的是层次分析法(AHP)、熵权法、ANP 法和组合赋权法等方法. 例如文[8]应用层次分析法确立权重,建立 AHP-TOPSIS 模型研究逆向物流的评价问题;文[9]应用熵权法计算客观权重,建立熵权-TOPSIS 法评价地下水水质;文[10]应用 ANP 计算权重,通过 ANP-TOPSIS 模型评价生物石油开发选择问题;文[11]运用组合赋权及 TOPSIS 研究绩效定量评价. 另外,文[12]探讨了应用有序加权平均算子(OWA)对 TOPSIS 进行集结,文[13]考虑到样本的代表性,采用线性回归方法求取权重. 在实践中应选择哪种赋权方法更为合理?当所得权重是在数据采集以前确定的,例如 AHP 和 ANP 等主观赋权法,批评者认为其忽视了评价指标数字特征本身所蕴含的信息,易受专家的知识、经验、偏好等主观因素影响;当所得权重是在数据采集之后计算出来的,例如熵权法和文[13]等客观赋权法,批评者认为其仅仅以数据说话,忽视了专

* 收稿日期:2016-08-22;修订日期:2017-02-10
基金项目:辽宁省教育厅项目(LJCR010)(LGCR007);辽工大第四批生产技术问题创新研究基金
作者简介:岳立柱(1976-),男,黑龙江省大庆人,博士后,研究方向:决策分析;李良琼(1979-),女,广东信宜人,博士研究生,讲师,研究方向:决策理论方法。

家的知识和经验. 采用组合赋权法能够兼顾专家特点与数据自身的信息,但不同的方法得到的权重往往不一致,选择哪种组合赋权依然是困扰. 值得注意的是,不同方法得到权重不同,但在权重排序上往往能取得一致,例如,文[14]用三种方法确定指标权重,从结果上看,尽管权重大小完全不同,权重顺序却完全相同. 因此,本文在偏序集基础上,仅通过权重的排序信息,应用 TOPSIS 模型进行决策分析.

2 TOPSIS 模型

TOPSIS 模型是通过计算各方案与正理想点、负理想点的距离来进行排序,若方案距离正理想点最近同时距离负理想点最远,则该方案为最优方案. 给定评价集 $M=(A,IC,D)$, 其中 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 为评估对象或方案集, $IC=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ 为评价准则集, $D=(x_{ij})_{m\times n}\in R^{m\times n}$ 为评价矩阵, 其中 $x_{ij}=c_j(a_i)$ 表示评估对象 a_i 关于评估准则 c_j 上的测定值.

$$M=\begin{array}{c|ccc} & \mathrm{c}_1 & \cdots & \mathrm{c}_n \\ \hline a_1 & x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m & x_{m1} & \cdots & x_{mn}\end{array}$$

权重向量 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$, 其中 ω_j 为准则 c_j 的权重, 且 $\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n=1$. 效益型准则取值越大越好,成本型准则与此相反,取值越小越好. 为了各个指标之间能够相互比较,需要将矩阵 D 转换为一个无量纲的矩阵 $Y=(y_{ij})_{m\times n}$, 一般采用如下方法[15]:

$$y_{ij}=x_{ij}\Big/\sqrt{x_{1j}^2+x_{2j}^2+\cdots+x_{mj}^2},i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n \tag{1}$$

TOPSIS 排序方法操作如下[15]:

步骤 1 确定正理想点和负理想点

$$y^+=(y_1^+,y_2^+,\cdots,y_n^+)$$
$$y^-=(y_1^-,y_2^-,\cdots,y_n^-)$$

其中, $y_j^+=\max\{y_{1j},y_{2j},\cdots,y_{mj}\}$, $y_j^-=\min\{y_{1j},y_{2j},\cdots,y_{mj}\}$, $j=1,2,\cdots,n$.

步骤 2 矩阵 $Y=(y_{ij})_{m\times n}$ 没有考虑到各准则的权重差异,需要根据给定权重计算各方案到理想点与负理想点的距离

$$d_i^+=\sqrt{\sum_{j=1}^n{\omega_j}^2(y_{ij}-y_j^+)^2} \tag{2}$$

$$d_i^-=\sqrt{\sum_{j=1}^n{\omega_j}^2(y_{ij}-y_j^-)^2} \tag{3}$$

步骤 3 计算各方案与理想点的接近程度

$$\gamma_i=d_i^-/(d_i^-+d_i^+)$$

步骤 4 按 γ_i 由大到小的顺序对方案进行排序,值越大表示方案越优.

3 TOPSIS 模型的偏序集表示

3.1 偏序集决策方法

定义 3.1[16] 设 R 是集合 A 上的一个二元关系,若 R 满足

(1)自反性:对任意 $x\in A$, 有 xRx;

(2)反对称性:对任意 $x,y\in A$, 若 xRy 且 yRx, 则 $x=y$;

(3)传递性：对任意 $x,y,z \in A$，若 xRy 且 yRz，则 xRz.

则称 R 为 A 上的偏序关系.

通常记"$\preceq$"表示偏序关系. 集合 A 和其上的偏序关系 $\preceq$ 一起称为偏序集，记为 $(A,\preceq)$. 由评价集 $\mathrm{M}=(A,IC,D)$ 构造的偏序关系 $\preceq$ 满足，对 $\forall x,y \in A$，有

$$x \preceq y \Leftrightarrow c_j(x) \leqslant c_j(y),\ j=1,2,\cdots,n \tag{5}$$

对于任意偏序集 $(A,\preceq)$，称集合 $O(x)=\{y \in A \mid x \succeq y\}$ 为 A 的下集；称集合 $F(x)=\{y \in A \mid x \preceq y\}$，为 A 的上集；称集合 $U(x)$ 为 A 的不可比集，其中 $U(x)=A-O(x)-F(x)$. 令 $|O(x)|$、$|F(x)|$ 和 $|U(x)|$ 分别表示 $O(x)$、$F(x)$ 和 $U(x)$ 元素个数. 对有 m 个方案的偏序集 $(A,\preceq)$，其下集、上集和区间集元素个数满足

$$|O(x)|+|F(x)|+|U(x)|=m+1 \tag{6}$$

对于任意 $x \in A$ 方案在偏序集 $(A,\preceq)$ 上的高度为[17]：

$$hav(x)=\frac{|O(x)|}{|O(x)|+|F(x)|}\cdot(|O(x)|+|U(x)|)+\frac{|F(x)|}{|O(x)|+|F(x)|}\cdot|O(x)| \tag{7}$$

偏序集决策方法是按照 $hav(x)$ 大小对方案进行排序.

3.2 偏序集表示原理

记 $k_{it}^{+}=(y_{it}-y_t^{+})^2$，$k_{it}^{-}=(y_{it}-y_t^{-})^2$，由式(2)和式(3)可知正、负理点距离平方公式分别为

$$(d_i^{+})^2=\sum_{t=1}^{n}\omega_t^2(y_{it}-y_t^{+})^2=\sum_{t=1}^{n}\omega_t^2 k_{it}^{+}$$

$$(d_i^{-})^2=\sum_{t=1}^{n}\omega_t^2(y_{it}-y_t^{-})^2=\sum_{t=1}^{n}\omega_t^2 k_{it}^{-}$$

定理 3.1　给定评价集 $M=(A,IC,D)$，设准则权重 $\omega_1 \geqslant \omega_2 \geqslant \cdots \geqslant \omega_n \geqslant 0$，若 $\sum_{t=1}^{l}k_{it}^{-} \leqslant \sum_{t=1}^{l}k_{jt}^{-}(l=1,2,\cdots,n)$，则 $d_i^{-} \leqslant d_j^{-}$.

证明：由于 $d_i^{-} \leqslant d_j^{-} \Leftrightarrow (d_i^{-})^2 \leqslant (d_j^{-})^2$，若 $(d_i^{-})^2 \leqslant (d_j^{-})^2$ 成立，则定理成立. 为了表示方便，记 $\Delta_t = k_{jt}^{-}-k_{it}^{-}$，于是

$$(d_j^{-})^2-(d_i^{-})^2=\omega_1^2\Delta_1+\omega_2^2\Delta_2+\cdots+\omega_n^2\Delta_n \tag{8}$$

由于 $\sum_{t=1}^{l}k_{it}^{-} \leqslant \sum_{t=1}^{l}k_{jt}^{-}$，$l=1,2,\cdots,n$，有

$$\sum_{t=1}^{l}\Delta_t \geqslant 0,\ l=1,2,\cdots,n \tag{9}$$

又 $\omega_1 \geqslant \omega_2 \geqslant \cdots \geqslant \omega_n \geqslant 0$，可知

$$(d_j^{-})^2-(d_i^{-})^2 \geqslant \omega_2^2\Delta_1+\omega_2^2\Delta_2+\cdots+\omega_n^2\Delta_n=\omega_2^2(\Delta_1+\Delta_2)+\omega_3^2\Delta_3+\cdots+\omega_n^2\Delta_n$$
$$\geqslant \omega_3^2(\Delta_1+\Delta_2)+\omega_3^2\Delta_3+\cdots+\omega_n^2\Delta_n=\omega_3^2(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3)+\cdots+\omega_n^2\Delta_n$$
$$\vdots$$
$$\geqslant \omega_{n-1}^2(\Delta_1+\cdots+\Delta_{n-2})+\omega_{n-1}^2\Delta_{n-1}+\omega_n^2\Delta_n=\omega_{n-1}^2(\Delta_1+\cdots+\Delta_{n-1})+\cdots+\omega_n^2\Delta_n$$
$$\geqslant \omega_n^2(\Delta_1+\Delta_2+\cdots+\Delta_{n-1})+\cdots+\omega_n^2\Delta_n=\omega_n^2(\Delta_1+\Delta_2+\cdots+\Delta_n)\geqslant 0.$$

于是 $(d_i^{-})^2 \leqslant (d_j^{-})^2$ 成立. 证毕.

定理 3.2　给定评价集 $M=(A,IC,D)$，设权重 $\omega_1 \geqslant \omega_2 \geqslant \cdots \geqslant \omega_n \geqslant 0$，若 $\sum_{t=1}^{l}k_{it}^{+} \leqslant \sum_{t=1}^{l}k_{jt}^{+}(l=1,2,\cdots,n)$，则 $d_i^{+} \leqslant d_j^{+}$.

定理 3.2 与定理 3.1 证明类似，证略.

任意方案的正、负理想点距离平方公式，可由矩阵 K^{+} 和 K^{-} 通过权重顺序进行变换来表示，其中

$$K^{-}=\begin{bmatrix}k_{11}^{-} & k_{12}^{-} & \cdots & k_{1n}^{-}\\ k_{21}^{-} & k_{22}^{-} & \cdots & k_{2n}^{-}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_{m1}^{-} & k_{m2}^{-} & \cdots & k_{mn}^{-}\end{bmatrix},\ K^{+}=\begin{bmatrix}k_{11}^{+} & k_{12}^{+} & \cdots & k_{1n}^{+}\\ k_{21}^{+} & k_{22}^{+} & \cdots & k_{2n}^{+}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_{m1}^{+} & k_{m2}^{+} & \cdots & k_{mn}^{+}\end{bmatrix}$$

考虑上三角矩阵 E

$$E=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

当 $\omega_1 \geqslant \omega_2 \geqslant \cdots \geqslant \omega_n \geqslant 0$. 上三角矩阵 E 和矩阵 K^{+} 和 K^{-} 进行如下运算,分别得到矩阵 P 和 Q:

$$P=(p_{ij})_{m\times n}=K^{+}\cdot E=\begin{bmatrix}k_{11}^{+} & k_{11}^{+}+k_{12}^{+} & \cdots & k_{11}^{+}+k_{12}^{+}+\wedge+k_{1n}^{+}\\ k_{21}^{+} & k_{21}^{+}+k_{22}^{+} & \cdots & k_{21}^{+}+k_{22}^{+}+\wedge+k_{2n}^{+}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_{m1}^{+} & k_{m1}^{+}+k_{m2}^{+} & \cdots & k_{21}^{+}+k_{22}^{+}+\wedge+k_{mn}^{+}\end{bmatrix} \tag{10}$$

$$Q=(q_{ij})_{m\times n}=K^{-}\cdot E=\begin{bmatrix}k_{11}^{-} & k_{11}^{-}+k_{12}^{-} & \cdots & k_{11}^{-}+k_{12}^{-}+\wedge+k_{1n}^{-}\\ k_{21}^{-} & k_{21}^{-}+k_{22}^{-} & \cdots & k_{21}^{-}+k_{22}^{-}+\wedge+k_{2n}^{-}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_{m1}^{-} & k_{m1}^{-}+k_{m2}^{-} & \cdots & k_{21}^{-}+k_{22}^{-}+\wedge+k_{mn}^{-}\end{bmatrix} \tag{11}$$

根据定理 3.2 知,矩阵 P 中若 $p_{il}\leqslant p_{jl}(l=1,2,\cdots,n)$,则有 $d_i^{+}\leqslant d_j^{+}$;根据定理 3.1 知,矩阵 Q 中若 $q_{il}\leqslant q_{jl}(l=1,2,\cdots,n)$,则有 $d_i^{-}\leqslant d_j^{-}$.

3.3 方案排序

定义 3.1 设评价集 $M=(A,IC,D)$,对于 $\forall\ a_i,a_j\in A$,若 $d_i^{+}\geqslant d_j^{+}$, $d_i^{-}\leqslant d_j^{-}$,则称 $a_i\preceq a_j$

由定义 3.1 可知 $\gamma_i=\dfrac{d_i^{-}}{d_i^{-}+d_i^{+}}\leqslant\dfrac{d_i^{-}}{d_i^{-}+d_j^{+}}\leqslant\dfrac{d_j^{-}}{d_j^{-}+d_j^{+}}=\gamma_j$,即有 $a_i\preceq a_j\Rightarrow\gamma_i\leqslant\gamma_j$.

定义 3.2 给定偏序集 $(A,\preceq)$,对于 $\forall\ a_i,a_j\in A$,若 $a_i\succeq a_j$,则记 $r_{ij}=1$;若 $a_i\prec a_j$ 或者 a_i 与 a_j 不可比,则记 $r_{ij}=0$. 则称 $R=(r_{ij})_{m\times m}$ 为 $(A,\preceq)$ 的比较关系矩阵.

定理 3.3 设 $R=(r_{ij})_{m\times m}$ 为偏序集 $(A,\preceq)$ 的比较关系矩阵,则对于 $\forall\ a_i\in A$,则式(7)等价于

$$hav(a_i)=\frac{(m+1)}{1+\sum\limits_{t=1}^{m}r_{ti}\Big/\sum\limits_{t=1}^{m}r_{it}} \tag{12}$$

证明:根据上集的定义,若 $a_t\in F(a_i)$,则有 $a_i\preceq a_t$,二者对应的关系值为 $r_{ti}=1$;若 $r_{ti}=0$,则 $a_i\npreceq a_t$,于是 a_i 上集元素个数为 $|F(a_i)|=\sum\limits_{t=1}^{m}r_{ti}$. 同理可得,$a_i$ 下集元素总数为 $|O(a_i)|=\sum\limits_{t=1}^{m}r_{it}$.

式(7)右端整理后可得

$$hav(x)=\frac{(|O(x)|+|U(x)|+|F(x)|)}{|O(x)|+|F(x)|}\cdot|O(x)| \tag{13}$$

根据式(6)知 $O(x)+F(x)+U(x)=m+1$,进而,式(13)变换为

$$hav(x)=\frac{(m+1)}{|O(x)|+|F(x)|}\cdot|O(x)|=\frac{(m+1)}{1+|F(x)|/|O(x)|} \tag{14}$$

将 $|F(a_i)|=\sum\limits_{t=1}^{m}r_{ti}$ 和 $|O(a_i)|=\sum\limits_{t=1}^{m}r_{it}$ 带入上式(14)得到式(12). 证毕.

3.4　HASSE 矩阵与 HASSE 图的生成

由比较关系矩阵 R 可以绘制偏序图,使偏序关系一目了然. 当偏序关系的节点较多,关系较复杂时,需要通过 HASSE 图简化该图. 文[18]给出了比较关系矩阵与 HASSE 矩阵相互转化的关系:

$$H_R = (R - I) - (R - I)^2 \tag{15}$$

其中,R 为关系矩阵,H_R 为 HASSE 矩阵,I 为单位矩阵,矩阵 $(R - I)^2$ 为布尔运算(即 $1+1=1$, $1+0=1, 0+0=0, 1\times1=1, 1\times0=0, 0\times0=0$). 需要说明的是,应用式(15)不允许出现取值相同的方案.

应用 hasse 图或者 hasse 矩阵(根据式(12))不仅能对方案进行排序,同时能反映方案排序的稳定性,另外,通过 hasse 图的结构信息,方便对方案分层. 对于同层方案而言,这些方案间的排序不是恒定的,往往会随着权重的变化而发生排序变化,换句话说,这些方案是很难明显比较出优劣的,它们在各指标上的表现不分伯仲. 关于 hasse 图详细绘制与应用介绍可参见文[19].

综上,应用偏序集表示 TOPSIS 模型操作步骤如下:

第一步:依权重大小对指标进行排序. 对原始数据矩阵 X 依据指标顺序对指标进行重新编号,即 n 个指标,第 i 个指标权重为第 i 大,应用式(1)得到矩阵 Y;

第二步:根据 $k_{it}^{+} = (y_{it} - y_t^{+})^2$, $k_{it}^{-} = (y_{it} - y_t^{-})^2$ 得到矩阵 K^{+} 和 K^{-};

第三步:由式(10)和式(11)得到矩阵 $P = (p_{ij})_{m\times m}$ 和 $Q = (q_{ij})_{m\times m}$;

第四步:由 $p_{il} \geqslant p_{jl}, q_{il} \leqslant q_{jl}, l = 1,2,\cdots,n$, 知 $a_i \geq a_j$, 进而得到比较关系矩阵 R;

第五步:由式(12)计算方案在 $(A, \leqslant)$ 的排名;

第六步:根据式(15)由 R 得到 hasse 矩阵绘制 hasse 图,对排序的稳定性和方案间的结构关系进行分析.

4　实例应用

为了对比方便,采用文[20]案例. 面板零件在航空航天领域中很常见,有如孔、加强筋、槽等特征的复杂结构. 需要使用铝合金材料,通过一些工艺进行制作,该案例对工艺中的槽粗铣切削系统进行研究. 该操作系统有四个切削参数,分别为主轴转速 SS(r/分钟)、加料速度 FR(毫米/分钟)、切削宽度 CW(毫米)、切削深度 CD(毫米)(见表 1). 为了使系统适应各种类型的机床,加工数据手册提供的切削参数通常更为保守,机器工具和突出的特点可能无法充分利用. 因此,对给定的 7 组参数,应用 TOPSIS 模型选择最优的参数.

文[20]应用熵权法得到各准则权重 $w_1 = 0.2838, w_2 = 0.2662, w_3 = 0.2533, w_4 = 0.1967$.

第一步:依权重顺序 $w_1 > w_2 > w_3 > w_4$,由式(1)得到矩阵 Y(见表 2)

表 1　原始数据

NO	FR	CD	CW	SS
A1	1100	4	1	11000
A2	2200	4	1	11000
A3	1900	3	1	7300
A4	2000	4	1	6000
A5	800	2	0.8	5000
A6	1200	5	1	7000
A7	1800	6	2	8000

表 2　标准化数据

NO	FR	CD	CW	SS
A1	0.27	0.36	0.32	0.51
A2	0.53	0.36	0.32	0.51
A3	0.46	0.27	0.32	0.34
A4	0.49	0.36	0.32	0.28
A5	0.19	0.18	0.26	0.23
A6	0.29	0.45	0.32	0.32
A7	0.44	0.54	0.64	0.37

第二步:根据标准化矩阵可知正理想点为(0.53,0.54,0.64,0.51),负理想点为(0.19,0.18,0.26,0.23),得到 K^{+} 和 K^{-}(表略).

第三步:由式(10)和式(11)得到矩阵 $P=(p_{ij})_{m\times m}$(表 3)和 $Q=(q_{ij})_{m\times m}$(表 4)

表 3 P 矩阵

NO	p_1	p_2	p_3	p_4
A1	0.0676	0.1	0.2024	0.2024
A2	0	0.0324	0.1348	0.1348
A3	0.0049	0.0778	0.1802	0.2091
A4	0.0016	0.034	0.1364	0.1893
A5	0.1156	0.2452	0.3896	0.468
A6	0.0576	0.0657	0.1681	0.2042
A7	0.0081	0.0081	0.0081	0.0277

表 4 Q 矩阵

NO	q_1	q_2	q_3	q_4
A1	0.0064	0.0388	0.0424	0.1208
A2	0.1156	0.148	0.1516	0.23
A3	0.0729	0.081	0.0846	0.0967
A4	0.09	0.1224	0.126	0.1285
A5	0	0	0	0
A6	0.01	0.0829	0.0865	0.0946
A7	0.0625	0.1921	0.3365	0.3561

第四步:由 $p_{il}\geqslant p_{jl}, q_{il}\leqslant q_{jl}, l=1,2,\cdots,n$,知 $a_i\geq a_j$,进而得到矩阵 R(表 5)

表 5 比较关系矩阵

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
A1	1	0	0	0	1	0	0
A2	1	1	1	1	1	1	0
A3	0	0	1	0	1	0	0
A4	1	0	1	1	1	1	0
A5	0	0	0	0	1	0	0
A6	0	0	0	0	1	1	0
A7	1	0	0	0	1	1	1

第五步:在比较关系矩阵 R 基础上,应用式(12)得:$hav(A_1)=2.6667, hav(A_2)=6.8571$, $hav(A_3)=3.2, hav(A_4)=5.7143, hav(A_5)=1, hav(A_6)=2.6667, hav(A_7)=6.4$,于是有

$A2\succ A7\succ A4\succ A3\succ A6=A1\succ A5.$

第六步:根据公式(15),由比较关系矩阵 R 得到 Hasse 矩阵,绘制 Hasse 图(图 1)

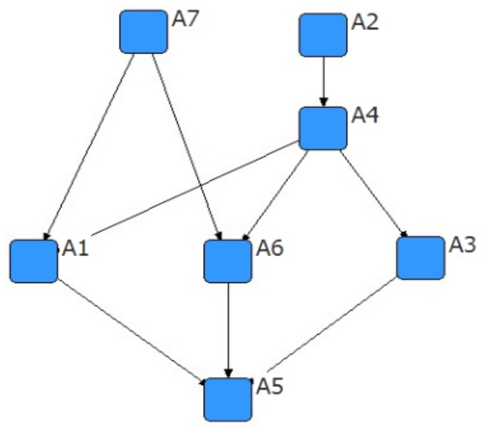

图 1 hasse 图

通过图 1 可以看出,7 个方案可以划分为三个层集,第一层集为{A2,A7},第二层集为{A1,A3,A4,A6},第三层集为{A5},最优的方案为第一层集即方案 A2 和 A7,最劣方案为第三层集即为 A5.

对比分析：文[20]给出方案排序为 $A7 \succ A2 \succ A4 \succ A3 \succ A6 \succ A1 \succ A5$，与本文排序有所不同. 本文方法与文[20]相比有三方面独特之处：

(1)能够识别排序的稳定程度. 由图 1 可以看出方案 A7 优于 A6，方案 A2 优于 A3、A1 和 A4，同时方案 A5 劣于所有其它方案，只要权重顺序保持不变即 $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3 > \omega_4$，无论各指标权重如何变动，上述比较关系保持不变. 除此之外，图 1 中任意两个不可比方案排序并非恒定，例如 A2 和 A7，文[20]认为 A2 优于 A7，但理论上总是存在一组不违反前述顺序的权重，使得 A7 优于 A2.

(2)能够应用更多的赋权方法. 本文方法仅需要权重大小序数信息，由于大多数权重方法在获得权重序数上经常能达成一致，只要该赋权方法能够有效提取权重顺序信息便可以应用. 同时，对于决策问题复杂度较高和信息不全的情况下，可以通过专家获得权重顺序，解决了没有具体权重便不能应用模型的问题.

(3)能够体现出方案间的分层信息. 通过 Hasse 图展示了 7 个方案可以分为三层. 对于方案排序，文[20]和本文虽有不同，但从层集信息的角度看是一致的，即第一层集方案优于第二层集，第二层集方案优于第三层集，即 $\{A7, A2\} \succ \{A4, A3, A6, A1\} \succ \{A5\}$.

5　结论

通过权重序数信息，应用偏序集对 TOPSIS 模型进行表示，不仅能够对方案进行排序，还能对方案排序稳定性和方案间的层次关系进行分析. 在实践应用上，解决了选择赋权方法的困扰问题，只有选择的赋权方法得到的排序不违背现实意义，那么就可以用这种方法得到权重的排序信息，使得更多的赋权方法能够应用于 TOPSIS 模型；偏序集表示的 TOPSIS 方法具有很好的鲁棒性，不论准则权重发生怎样变化，只要权重大小顺序不变，可比方案的排序关系总是保持不变，避免了对权重进行仿真分析过程. 不过，对不可比方案进行排序，后续的研究需要给出排序比较的概率值，反映方案排序发生的可能性.

参考文献：

[1] Hwang C L, Yoon K S. Multiple attribute decision making: method and application. A State-of-the-Art Survey [M]. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1981.

[2] 常志朋，程龙生，刘家树. 基于马田系统与的区间数多属性决策方法[J]. 系统工程理论与实践，2014，3(1)：168～175.

[3] Roszkowskaa E, Kacprzak D. The fuzzy saw and fuzzy TOPSIS procedures based on ordered fuzzy numbers[J]. Information Sciences, 2016, 369: 564～584.

[4] 张茂军，南江霞，李登峰，李延喜. 带有三角直觉模糊数的多属性决策的 TOPSIS[J]. 运筹与管理，2012，21(5)：96～101.

[5] Fei Ye. An extended TOPSIS method with interval-valued intuitionistic fuzzy numbers for virtual enterprise partner selection[J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37: 7050～7055.

[6] 王先甲，汪磊. 基于马氏距离的改进型 TOPSIS 在供应商选择中的应用[J]. 控制与决策，2012，27(10)：1566～1570.

[7] Cascalesa M S G, TeresaLamata M. On rank reversal and TOPSIS method[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2012, 56: 123～132.

[8] Prakash C, Barua M K. Integration of AHP-TOPSIS method for prioritizing the solutions of reverse logistics adoption to overcome its barriers under fuzzy environment[J]. Journal of Manufacturing Systems, 2015, 37: 599～615.

[9] Rouhani S, Ghazanfari M, Jafari M. Evaluation model of business intelligence for enterprise systems using fuzzy TOPSIS[J]. Expert Syst Appl, 2012, 39(3): 3764～3771.

[10] Sakthivel G, Ilangkumaran M, Aditya Gaikwad. A hybrid multi-criteria decision modeling approach for the best

biodiesel blend selection based on ANP-TOP SIS analysis[J]. Ain Shams Engineering Journal，2015,6,239～256.

[11] 余建星，谭振东. 基于组合赋权及 TOPSIS 的绩效定量评价研究[J]. 系统工程理论与实践，2005，11(11)：46～50.

[12] Ye Chen，Kevin W，Si-feng Liu. An OWA-TOPSIS method for multiple criteria decision analysis[J]. Expert Systems with Applications，2011，38：5205～5211.

[13] Xiao hui Wang，Bo Peng. Determining the value of the port transport waters：Based on improved TOPSIS model by multiple regression weighting[J]. Ocean and Coastal Management，2015，107：37～45.

[14] 林志娟，刘家佑，张庆辉，林秋华. 理想解类似度偏好顺序评估方法之延伸及其应用[J]. 中国统计学报(台)，2005，43(3)：313～335.

[15] Renato A. Krohling G，André G，Pacheco C. A-TOPSIS －An approach Based on TOPSIS for Ranking Evolutionary Algorithms[J]. Procedia Computer Science，2015，55：308～317.

[16] 杜康. 偏序集分拆函数的计算及其算术性质[D]，南开大学，2013：1～5.

[17] Brüggemann R，Patil G P. Ranking and Prioritization for Multi-indicator Systems[M]. Springer New York Dordrecht Heidelberg London，2011.

[18] 范懿. 一个有关哈斯图的解析方法[J]. 上海第二工业大学学报，2003，1(1)：17～22.

[19] 刘存，韩寒，周雯，韩朔睽. 应用 Hasse 图解法筛选优先污染物[J]. 环境化学，2003，22(5)：499～502.

[20] Chong Peng ，Hanheng Du，T. Warren Liao A research on the cutting database system based on machining features and TOPSIS[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing，2017，43：96～104.

Using Poset to Express TOPSIS Model When Weights Is Difficult to Obtain

YUE Li-zhu，LI Liang-qiong

(School of Public Administration and Law，Liaoning Technical University，Fuxin 123000，China)

Abstract：When weights is difficult to obtain，the application of TOPSIS model will encounter difficulties. This paper presented that to use poset express TOPSIS Model，which can achieve sorting of TOPSIS model only with the information of weights order，and enhance the robustness of the sort. First，this paper introduced posets decision methods briefly，giving the poset expression of evaluation set model；then，to respectively express TOPSIS evaluation model as two sets according to the positive and negative rational distance. It showed that sorting of poset and sorting of TOPSIS model can guarantee the same order according to sort of weights information，so it can apply poset method to express TOPSIS model. Finally，with an example ，it can be seen that：this method is easy to operate，sort steadily，and solves the problem that it can not apply TOPSIS Model without weights.

Key words：TOPSIS；Multiple criteria decision making； Poset；Weight